

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(ΘΕΜΑΤΑ Α-Δ2)

ΘΕΜΑ Α

Α₁ Θεωρία, σελ. 99 σχολ. βιβλίου

Α₂ α. Πάθος διότι για παράδειγμα η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως
μονότονη.

Α₃ Θεωρία, σελ. 216 σχολ. βιβλίου

Α₄ α. Πάθος, β. Πάθος, γ. Ίωστό, δ. Ίωστό,
ε. Ίωστό.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = (x)' - 4 \left(\frac{1}{x^2} \right)' = 1 - 4 \left(-\frac{2x}{x^4} \right) = \\ &= 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 2^3}{x^3} = \frac{(x+2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) + 3 = (x+1)^2 + 3 > 0.$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot x^3 < 0$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x+2	-	0	+	+
x^3	-	-	+	+
f'	+	0	-	+
f	↗	ε.μ.	↘	↗

Επομένως η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καμία από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, την

$$\text{ομή } f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3.$$

B₂. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8 \cdot \frac{-3x^2}{x^6} = \\ &= -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω σε καδένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

β3. α). $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και η f δεν έχει ορισμένη ασύμπτωση στο $-\infty$.

β). $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f δεν έχει ορισμένη ασύμπτωση στο $+\infty$.

γ). $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$, άρα

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. Άρα η f έχει

κατακόρυφη ασύμπτωση την ευθεία

$x = 0$ (κατακόρυφος άξονας).

δ). Είρα: $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 4}{x^3}$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. ($= a$)

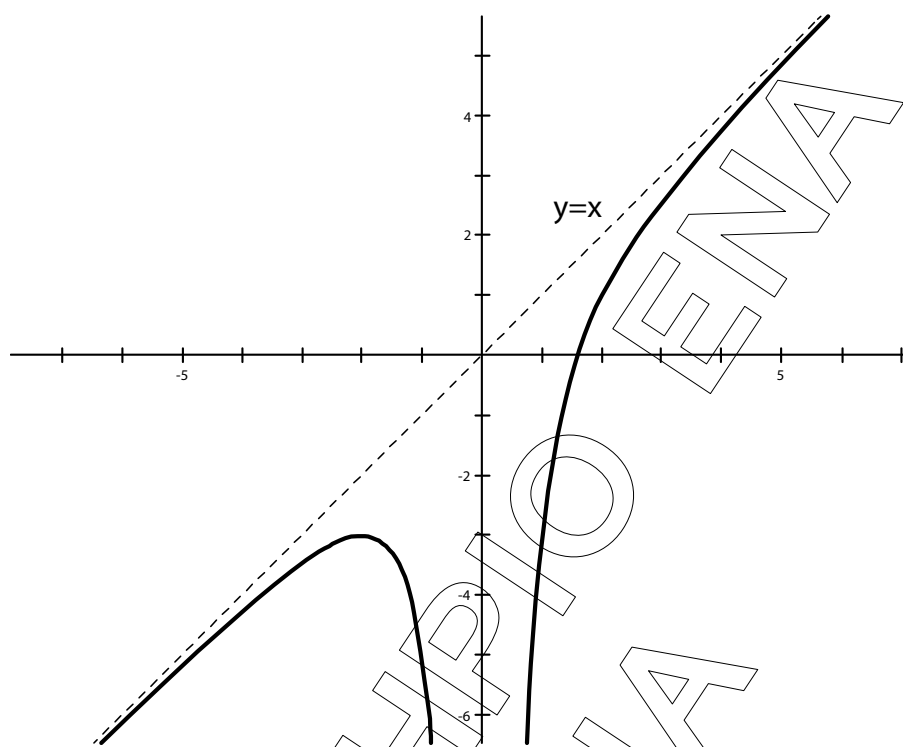
Επίσης $f(x) - x = -\frac{4}{x^3}$, άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$. ($= b$)

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωση την ευθεία

$y = x$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ Π Το πρώτο τρίγωνο αφού είναι μηκών x και
κατασκευάστηκε τετραγώνου η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$,
Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$
Το δεύτερο τρίγωνο θα είναι μηκών $8-x$. Έστω p η ακτίνα του κύκλου
απο το τρίγωνο αυτό, τότε θα είναι $2\pi p = 8-x \Rightarrow p = \frac{8-x}{2\pi}$
Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι $E_2 = \pi p^2 = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2$
 $= \pi \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{64+x^2-16x}{4\pi}$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών θα είναι $F(x) = E_1 + E_2 =$
 $= \frac{x^2}{16} + \frac{64+x^2-16x}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 + 4x^2 - 64x}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$
θα είναι $x > 0$ και $8-x > 0 \Leftrightarrow \frac{x > 0}{x < 8} \Leftrightarrow \underline{0 < x < 8}$

Π₂ Είμαι $E'(x) = \frac{1}{16\pi} [2(\pi+4)x - 64]$, $0 < x < 8$.

Είμαι $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\pi+4)x - 64 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}$

Άρα στο τον πίνακα μεταβαίνω

η E παρασώζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$
με τιμή $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4) \frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64 \cdot \frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi}$

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
E'		-	+
E		$\searrow$	$\nearrow$

$$= \dots = \frac{16}{\pi+4}$$

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$

και η διάμετρος του κύκλου είναι $2p = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-x}{\pi} =$
 $= \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}$. Άρα η πλευρά του τετραγώνου
είναι $\frac{1}{16\pi}$ με την διάμετρο του κύκλου.

Γ3 Απρίλ ν.δ.ο η εφ'οσον $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$

$$\text{Έστω } A_1 = \left(0, \frac{32}{n+4}\right] \xrightarrow[E \downarrow]{E \text{ συνεχής}} E(A_1) = \left[E\left(\frac{32}{n+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right] \\ = \left[\frac{16}{n+4}, \frac{16}{n}\right] \quad \text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{n}.$$

$5 \in E(A_1)$ άρα από θεωρ. ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in A_1$: $E(x_0)=5$ και επειδή η E είναι $\nearrow$ στο A_1 , άρα το x_0 είναι μοναδικό.

$$\text{Επίσης αν } A_2 = \left[\frac{32}{n+4}, 8\right) \xrightarrow[E \nearrow]{E \text{ συνεχής}} E(A_2) = \left[E\left(\frac{32}{n+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) \\ = \left[\frac{16}{n+4}, 4\right) \quad \text{όπου } \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(n+4)x^2 - 64x + 256}{16n} \\ = \frac{(n+4)8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16n} = 4$$

$5 \notin E(A_2)$ άρα η εφ'οσον $E(x)=5$ έχει αδύνατο στο A_2 .

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in \left(0, \frac{32}{n+4}\right)$: $E(x_0)=5$

δηλ. μοναδικός τρόπον ώστε το άθροισμα των εμβαδών να ισούται με 5.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 2x^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $a > 1$.

Είναι $f'(x) = 2 \cdot x^{x-a} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = (2 \cdot e^{x-a} - 2x)' = 2 \cdot e^{x-a} - 2 = 2(e^{x-a} - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x-a = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x-a > 0 \Leftrightarrow x > a.$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < 1 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \Leftrightarrow x-a < 0 \Leftrightarrow x < a.$$

Συμπληρωτικό:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$\curvearrowright$	Σ.Κ	$\curvearrowleft$

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = a$.

$$\Delta_2. f'(x) = 2(e^{x-a} - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^a} \cdot e^x \right) = \frac{1}{e^a} \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty. \quad \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty.$$

$$\text{β)} f'(a) = 2(e^{a-a} - a) = 2(1-a) < 0.$$

γ) Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } f'(x) &= \frac{2}{e^a} \cdot e^x - 2x = \\ &= x \cdot \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^a} \cdot \frac{e^x}{x} - 2 \right) = +\infty.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$ (γύρω σου B_1)

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f'((-\infty, a]) &= [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = \\ &= [2(1-a), +\infty). \end{aligned}$$

- Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, +\infty)$ (γύρω σου θ_1)

$$\text{Άρα } f'([a, +\infty)) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)) = [2(1-a), +\infty).$$

Άρα υπάρχει τιμή $\bar{x}_1$ στο διάστημα $(-\infty, a]$ ώστε $f'(\bar{x}_1) = 0$ και τιμή $\bar{x}_2$ στο διάστημα $[a, +\infty)$, ώστε $f'(\bar{x}_2) = 0$.

Όμως στο $(-\infty, a]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα

$$\text{άρα } x < \bar{x}_1 \Rightarrow f'(x) > f'(\bar{x}_1) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$\text{για } x > \bar{x}_1 \Rightarrow f'(x) < f'(\bar{x}_1) \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Επίσης στο $[a, +\infty)$, η f' είναι γρ. αύξουσα.

$$\text{άρα για } x < \bar{x}_2 \Rightarrow f'(x) < f'(\bar{x}_2) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{για } x > \bar{x}_2 \Rightarrow f'(x) > f'(\bar{x}_2) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Δηλαδή προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών της f'

x	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
f'	$+\infty$	$\downarrow$	$-$	$\downarrow$	$+\infty$
f		$\nearrow$ τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$

Προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2
τέτοια ώστε $\pi \circ f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο
στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΒΕΡΟΙΑ